Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind

Von F. SZÁSZ in Budapest

Professor Béla Szőkefalvi-Nagy zu seinem 50. Geburtstag gewidmet

Der Zweck dieser Arbeit ist die Bestimmung aller im Titel genannten Halbgruppen. Das analoge ringtheoretische, aber viel zusammengesetztere Problem habe ich früher behandelt [5]. Bezüglich weiterer ähnlicher Untersuchungen vgl. man etwa [1], [3], [4] und [6].

Eine Halbgruppe H werde eine Ω-Halbgruppe genannt, wenn sämtliche endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale von H sind.

Wir haben also alle Ω-Halbgruppen zu bestimmen.

Es wäre interessant auch alle Halbgruppen, deren Teilhalbgruppen Rechstsideale sind, explicit zu beschreiben. (Vgl. bezüglich der Hamiltonschen Gruppen die Arbeit [1] und bezüglich der entsprechenden Ringe die Arbeiten [3] und [4].)

Bezüglich der nötigen Begriffe der Algebra verweisen wir z. B. auf das Buch [2] von L. RÉDEI. $\{\ldots\}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Teilhalbgruppe einer Halbgruppe.

Alle Ω-Halbgruppen bestehen aus höchstens vier Elementen und zwar gilt der

Satz. *Die untereinander nichtisomorphen Ω-Halbgruppen sind die folgenden:*

1. $\{a\}$ *mit* $a^2=a$;
2. $\{a\}$ *mit* $a^3=a^2$;
3. $\{a\}$ *mit* $a^4=a^3$;
4. $\{a, b\}$ *mit* $a^2=ab=a,\ b^2=ba=b$;
5. $\{a, b\}$ *mit* $a^3=a^2=b^3=b^2=ab=ba$;
6. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3=ab=ba$;
7. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3=ab,\ a^2=b^2=ba$;
8. $\{a, b\}$ *mit* $a^4=a^3=b^4=b^3,\ a^2=b^2=ab=ba$.

Offenbar ist sowohl jede Teilhalbgruppe, als auch jedes homomorphe Bild einer Ω-Halbgruppe ebenfalls eine Ω-Halbgruppe. Ferner gibt es in jeder Ω-Halbgruppe zu beliebigen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die eine echte Teilhalbgruppe erzeugen, ein weiteres Element b mit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}=b\cup bH=\{b\}$, also läßt sich jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe einer Ω-Halbgruppe schon durch ein Element erzeugen. Daher sind die Ω-Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ im Sinne von L. RÉDEI [2]. Bei unserer Untersuchung über die

Ω-Halbgruppen wird aber der Satz von L. RÉDEI [2] über die einstufig nichtkommutativen endlichen Halbgruppen nicht benützt.

Wir brauchen den folgenden

Hilfssatz. *Damit in einem potenzenassoziativen Gruppoid G alle Teilgruppoide Rechtsideale sind, ist notwendig und hinreichend, daß für beliebige Elemente a, b von G eine Gleichung von der Form $ab=a^j$ ($j=1, 2$ oder 3) gilt. Hieraus folgt $a^{l+1}=a^l$ ($l=1, 2$ oder 3).*

Beweis. Ist jedes Teilhalbgruppoid des Gruppoides G ein Rechtsideal, so erhält man $a^2\cdot a=a^3\in\{a^2\}$, also $a^3=a^{2k}$ für eine natürliche Zahl k. Es seien nun m und n für $a\in G$ möglichst klein gewählt, derart, daß $a^m=a^n$ mit $0<m<n$ erfüllt ist. Dann sind die Elemente $a, a^2, \ldots, a^m, \ldots, a^{n-1}$ voneinander verschieden. Ferner ist das Element $e=a^{m(n-m)}$ idempotent (vgl. z. B. RÉDEI [2], Seite 51). Da $e=a^l$ für ein l mit $1\leqq l\leqq n-1$ idempotent ist, gilt $\{e\}=e$, und da jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist, gewinnen wir $eb=e$ für jedes $b\in G$. Also gilt auch $a^{l+1}=$ $=a^l$. Eine leichte Überlegung liefert nun die Beziehung $m=l<l+1=n$, woraus wegen $a^3=a^{2k}$ und wegen der Minimalität von $m=l$ auch $l\leqq\min(3, 2k)$, also $l\leqq 3$ folgt. Deshalb muß gewiß $a^4=a^3$ und auch $ab=a^j$ für jedes $a, b\in G$ mit einem Exponenten $j(\geqq 1, \leqq 3)$ bestehen. Die weiteren Behauptungen sind trivial. Somit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes. Es genügt zu zeigen, daß jede Ω-Halbgruppe H einer im Satz vorkommenden Halbgruppe isomorph ist. Andererseits sind nämlich die im Satz erwähnten Halbgruppen offenbar Ω-Halbgruppen. Im folgenden sei also H eine Ω-Halbgruppe.

I. Zuerst bestimmen wir die durch ein Element erzeugten Ω-Halbgruppen.

Nach dem Hilfssatz gilt für $H=\{a\}$ gewiß $a^{l+1}=a^l$ mit $l=1, 2$ oder 3. In allen drei Fällen wirkt hierbei a^l als das (multiplikative) Nullelement von H. Somit erhält man die im Satz bei 1., 2. und 3. erwähnten Halbgruppen.

Unter II—VII bestimmen wir die durch zwei, aber nicht durch ein Element erzeugten Ω-Halbgruppen.

II. Ist $H=\{a, b\}$ eine Ω-Halbgruppe, gelten ferner $a^2=a$ und $b^2=b$, so ergibt sich $ab=a$ und $ba=b$, also der im Satz bei 4. erwähnte Fall.

Für diesen Fall ist nichts zu beweisen.

III. Ist $H=\{a, b\}$ eine Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2=a$ und $b^3=b^2$, so ist $\{a, b\}$ keine Ω-Halbgruppe.

Zum Beweis nehmen wir an, daß H eine Ω-Halbgruppe ist, und bilden die echte Teilhalbgruppe $S=\{a, b^2\}$ von $\{a, b\}$, wobei wegen $(b^2)^2=b^2$, $a^2=a$, $ab^2=a$, $b^2a=b^2$ jedes Element von S idempotent ist, weil jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist. Dann gelten $S=\{s\}$, $s^2=s$ und somit $a=b^2$, woraus $H=\{b\}$ folgt, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $H=\{a, b\}$ keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

IV. Ist $H=\{a, b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2=a$ und $b^4=b^3$, so ist $H=\{a, b\}$ ebenfalls keine Ω-Halbgruppe.

Ist nämlich $H=\{a, b\}$ unter den erwähnten Voraussetzungen eine Ω-Halbgruppe, so gilt wegen $\{a, b^3\}\neq\{a, b\}$ auch $S=\{a, b^3\}=\{s\}$, $s^2=s$. Hieraus folgt

$a=b^3\in\{b\}$ und $\{a,b\}=\{b\}$, was unmöglich ist. Daher ist $\{a,b\}$ keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

V. Ist $H=\{a,b\}$ eine Ω-Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3=a^2$ und $b^3=b^2$, so erhält man $ab=ba=a^2=b^2$, also den im Satz bei 5. erwähnten Fall.

Die Untersuchung von $S=\{a^2, b^2\}$ liefert nämlich $S=\{s\}$, $a^2b^2=a^2$, $b^2a^2=b^2$, woraus wegen $s^2=s$ auch $a^2=b^2$ folgt. Ist nun $ab=a$, so erhält man $ab^2=a$, also $a=a^2=b^2\in\{b\}$ und $H=\{b\}$, was wegen der Voraussetzung unmöglich ist. Daher gilt gewiß $ab=a^2$ und ähnlich auch $ba=b^2$, w. z. b. w.

VI. Ist $H=\{a,b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3=a^2$ und $b^4=b^3$, so ist H keine Ω-Halbgruppe.

Ist nämlich $H=\{a,b\}$ eine Ω-Halbgruppe, so gilt für $S=\{a^2, b^3\}$ wegen $S\neq H$ gewiß $S=\{s\}$ mit $s^2=s$, denn man erhält $a^2b^3=a^2$ und $b^3a^2=b^3$. Daher ist $a^2=b^3$. Da $T=\{a, b^2\}\neq\{a,b\}$ ist, gewinnen wir $T=\{t\}$ mit entweder $t\in\{a\}$ oder $t\in\{b^2\}$ folglich $|T|\leqq 2$. Deshalb ergibt sich $a\in\{b^2\}$ und $\{a,b\}=\{b\}$, was ausgeschlossen ist. Daher ist $H=\{a,b\}$ tatsächlich keine Ω-Halbgruppe, w. z. b. w.

VII. Ist $H=\{a,b\}$ eine Ω-Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^4=a^3$ und $b^4=b^3$, so gewinnen wir die im Satz bei 6., 7. oder 8. erwähnten Fälle.

Aus der Untersuchung von $S_1=\{a^3, b^3\}$ folgt nämlich, mit ähnlichen Methoden, wie in V bzw. VI, daß $a^3=b^3$ gilt. Ferner läßt sich nach der Untersuchung der echten Teilhalbgruppe $S_2=\{a, b^2\}$ auch $b^2\in\{a\}$ bestätigen, denn sonst erhielte man $|S_2|\geqq 4$ für $S_2=\{s_2\}$, was wegen I unmöglich ist.

Jetzt sind neun weitere Unterfälle möglich, unter denen nur drei Unterfälle wirklich vorkommen werden: $ab=a^j$, wobei $j=1, 2$ oder 3, ferner $ba=b^k$, wobei $k=1, 2$ oder 3 gelten. Im Falle $j=1$ ergibt sich $a^3=a^4=ab^3=a$, was unmöglich ist. Daher gilt $j\neq 1$, und ähnlich auch $k\neq 1$. Da die Halbgruppen $\{a,b\}$, die den Fällen $(j,k)=(2,3)$ und $(j,k)=(3,2)$ entsprechen, untereinander isomorph sind, gewinnen wir für diese Fälle gleichzeitig die im Satz bei 7. vorkommende Halbgruppe. Im Unterfalle $(j,k)=(2,2)$ erhält man die im Satz bei 8. erwähnte Halbgruppe und im Falle $(j,k)=(3,3)$ die im Satz bei 6. vorkommende Halbgruppe. Daher liefern diese neun Möglichkeiten für (j,k) wirklich nur drei nichtisomorphe Halbgruppen, und zwar die im Satz bei 6., 7. und 8. betrachteten Halbgruppen, w. z. b. w.

VIII. Jetzt beweisen wir, daß jede Ω-Halbgruppe H entweder durch ein Element oder durch zwei Elemente erzeugt werden kann.

Läßt sich nämlich die Ω-Halbgruppe H durch keine ihrer endlichen Teilmengen erzeugen, so kann aus jedem unendlichen erzeugenden System $a_1, a_2, a_3, \dots$ von H eine abzählbar unendliche Teilmenge $b_1, b_2, b_3, \dots$ ausgewählt werden, derart, daß $b_{j+1}\notin\{b_1, b_2, \dots, b_j\}$ für jedes $j=1, 2, 3, \dots$ gilt. Es sei nun $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dann gilt wegen der Definition der Folge $b_1, b_2, b_3, \dots$ einerseits $|B|\geqq 4$, andererseits wegen I und wegen $B\neq H$, $B=\{b\}$ gewiß $|B|\leqq 3$, was aber ein Widerspruch ist. Also läßt sich H schon durch endlich viele Elemente erzeugen. Es sei m das Minimum derjenigen natürlichen Zahlen n, für welche wenigstens ein aus genau n Elementen bestehendes erzeugendes System der Halbgruppe H existiert. Dann gibt es Elemente $c_1, c_2, \dots, c_m\in H$ mit $H=\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ und mit $S=\{c_2, \dots, c_m\}\neq$

$\neq H$, denn m ist minimal gewählt. Da H eine Ω-Halbgruppe ist, erhält man wegen $S=\{s\}$ gewiß $H=\{c_1, S\}=\{c_1, s\}$, folglich $m \leqq 2$, w. z. b. w.

Somit haben wir den Satz bewiesen.

Jetzt betrachten wir noch eine Klasse von Halbgruppen.

Eine Halbgruppe H wird eine Ω'-Halbgruppe genannt, wenn jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe S von H in der Gestalt hH $(h \in H)$ dargestellt werden kann.

Es wird sich unter anderem herausstellen, daß jede Ω'-Halbgruppe eine Ω-Halbgruppe ist.

Wegen $hH \subseteqq \{h\}$ sind die Ω'-Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ. Ferner sind die echten, endlich erzeugbaren Teilhalbgruppen S einer Ω'-Halbgruppe H wegen $hH \subseteqq \{h\}$ und wegen des Hilfssatzes höchstens von der Mächtigkeit drei. Ähnlich dem Beweisschritt VIII über die Ω-Halbgruppen kann bewiesen werden, daß auch jede Ω'-Halbgruppe endlich ist.

Ist eine Ω'-Halbgruppe durch ein Element erzeugbar, so ist sie einer im Satz bei 1., 2. oder 3. erwähnten Halbgruppe isomorph.

Läßt sich aber eine Ω'-Halbgruppe nicht durch ein Element erzeugen, so ist sie durch zwei Elemente erzeugbar, wie diese Tatsache dem Schritt VIII ähnlich einzusehen ist.

Wir betrachten jetzt diejenigen Ω'-Halbgruppen $H=\{a, b\}$, die sich nicht durch ein Element erzeugen lassen. Es sei $M=mH$ $(m \in H)$ eine beliebige maximale Teilhalbgruppe von H. Dann erhält man $mH \subseteqq \{m\}$, also $mH=\{m\} \neq H$ und $mh=m$ $(h \in H)$. Dann besteht die Teilhalbgruppe $S=m\{h\}$ aus dem einzigen idempotenten Element $m \in H$, womit $|M|=1$ bewiesen ist. Es seien jetzt $x \in H$ ein beliebiges Element mit $x \neq m$ und $\{y\}$ eine maximale Teilhalbgruppe von H mit $x \in \{y\}$. Nach den Vorigen gelten dann $\{x\}=\{y\}$, $|\{y\}|=1$ und $H=\{m, x\}$, wobei offenbar $m^2= =mx=m$ und $x^2=xm=x$ bestehen. Das ist der im Satz bei 4. vorkommende Fall. Umgekehrt sind diese Halbgruppen Ω'-Halbgruppen.

Damit ist bewiesen:

Alle Ω'-Halbgruppen sind die im Satz bei 1—4. *aufgezählten Ω-Halbgruppen.*

Literatur

[1] R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg*, **2** (1933), 12—17.

[2] L. Rédei, *Algebra I* (Leipzig, 1959).

[3] L. Rédei, Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math.*, **56** (1952), 89—95.

[4] L. Rédei, Vollidealringe im weiteren Sinne I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1962), 243—268.

[5] F. Szász, Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 115—132.

[6] F. Szász, Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közleményei*, **5** (1960), 287—297.

(Eingegangen am 3. August 1962, in veränderter Form am 10. Juli 1963)